2^{η} δεκάδα θεμάτων επανάληψης

11.

Α . Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ τότε για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς θ_1 , $\theta_2 > 0$ να αποδείξετε ότι $\log_{\alpha}(\theta_1\theta_2) = \log_{\alpha}\theta_1 + \log_{\alpha}\theta_2$

Β . Έστω το σύστημα

$$\Sigma : \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases} .$$

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ)

1) Αν $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ τότε το Σ είναι κατά ανάγκη αδύνατο

2) Αν για την ορίζουσα D του συστήματος ισχύει $D \neq 0$ τότε το Σ έχει μία μόνο λύση

3) Αν το ζεύγος $(x , y) = (1, 1)$ είναι λύση του Σ τότε $\alpha_1 + \beta_1 = \gamma_1$

4) Αν για τις ορίζουσες του Σ ισχύουν $D = 0$ και ($D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$) τότε το Σ είναι αδύνατο

Γ. Να κάνετε τις σωστές αντιστοιχήσεις

Εξίσωση	Λύση εξίσωσης
α . $\eta\mu x = \eta\mu\theta$	**1**. $x = k\pi + \theta \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$
β . $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta$	**2.** $x = 2k\pi + \theta$ ή $x = 2k\pi - \theta \quad , k \in \mathbb{Z}$
γ . $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta$	**3.** $x = 2k\pi + \theta$ ή $x = 2k\pi + \pi - \theta \quad , k \in \mathbb{Z}$

Προτεινόμενη λύση

Α .

Έστω $\log_{\alpha}\theta_1 = x$ και $\log_{\alpha}\theta_2 = y \quad (1) \Rightarrow$

$\theta_1 = \alpha^{x}$ και $\theta_2 = \alpha^{y}$ (πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη)

$\theta_1\theta_2 = \alpha^x\alpha^y$

$\theta_1\theta_2 = \alpha^{x+y}$ (ορισμός λογαρίθμου)

$x + y = \log_{\alpha}(\theta_1\theta_2) \overset{(1)}{\Rightarrow} x + y = \log_{\alpha}\theta_1 + \log\alpha\theta_2$

Β .

1→ Λ , 2 → Σ , 3→Σ , 4→ Σ

Γ .

α → 3 , β → 2 , γ→1

12.

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

i) Ποιος είναι ο βαθμός του;

ii) Να βρείτε την αριθμητική τιμή του $P(-1)$

iii) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x-1)$

iv) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$

Προτεινόμενη Λύση

i)

Το πολυώνυμο είναι $3^{ου}$ βαθμού, αφού ο εκθέτης του μεγιστοβάθμιου όρου είναι 3.

ii)

$$P(-1) = (-1)^3 - 6\cdot(-1)^2 + 11\cdot(-1)1 - 6$$
$$= -1 - 6 - 11 - 6$$
$$= -24$$

iii)

Σχήμα Horner για $x = 1$

$\pi(x) = x^2 - 5x + 6$

1	−6	11	−6	1
	1	−5	6	
1	−5	6	0	

iv)

$P(x) = 0 \iff (x-1)(x^2-5x+6) = 0$

$x - 1 = 0$ ή $x^2 - 5x + 6 = 0$

$x = 1$ ή $x = 2$ ή $x = 3$

Πρόσημο του P(x)

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
P(x)		−	0	+	0	−	0	+	

Επομένως : $P(x) < 0 \iff x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3)$

13.

i) Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{3}\,\text{συνx} - \text{ημx} = 0$

ii) Από τις λύσεις της εξίσωσης ποιες βρίσκονται στο διάστημα $(0,\ 3\pi)$;

Προτεινόμενη λύση

i)

$\sqrt{3}\,\text{συνx} - \text{ημx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\,\text{συνx} = \text{ημx}$

Αν ήταν συνx = 0 τότε η εξίσωση θα γινόταν ημx = 0, πράγμα αδύνατο αφού ταυτόχρονα δεν μπορεί να είναι και συνx = 0 και ημx = 0

Για να έχει λύση λοιπόν η εξίσωση πρέπει $\text{συνx} \neq 0$

Η εξίσωση $\Leftrightarrow \quad \sqrt{3} = \dfrac{\text{ημx}}{\text{συνx}}$

$$\text{εφx} = \sqrt{3}$$

$$\text{εφx} = \text{εφ}\frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi + \frac{\pi}{3}\ ,\ k \in \mathbb{Z} \quad \textbf{(1)}$$

ii)

Πρέπει $0 < x < 3\pi \quad \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \quad 0 < k\pi + \dfrac{\pi}{3} < 3\pi$

$$-\frac{\pi}{3} < k\pi < 3\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{\pi}{3} < k\pi < \frac{8\pi}{3}$$

$$-\frac{1}{3} < k < \frac{8}{3} \quad \text{και επειδή } k \in \mathbb{Z} \text{ θα είναι}$$

$$k = 0 \quad \text{ή} \quad k = 1 \quad \text{ή} \quad k = 2$$

- Για $k = 0$ η (1) δίνει $x = \dfrac{\pi}{3}$
- Για $k = 1$ η (1) δίνει $x = \dfrac{4\pi}{3}$
- Για $k = 2$ η (1) δίνει $x = \dfrac{7\pi}{3}$

14.

i) Αν $α = \log(8\cdot 2^x - 2)$, $β = \log(4\cdot 2^x - 1)$, $γ = (3\cdot 2^x - 1)$ να βρείτε το x ώστε οι αριθμοί α, β , γ να ικανοποιούν την σχέση $2β = α + γ$

ii) Για $x = -1$ να βρείτε τους αριθμούς α , β , γ , να δείξετε ότι δύο από αυτούς είναι αντίθετοι και να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 10^α + 10^β + 10^γ$

Προτεινόμενη λύση

i)

Θα πρέπει να ισχύουν

$8\cdot 2^x - 2 > 0$ και $4\cdot 2^x - 1 > 0$ και $3\cdot 2^x - 1 > 0$

Με αυτούς τους περιορισμούς διαδοχικά έχουμε

$$2β = α + γ \Leftrightarrow$$

$$2\log(4\cdot 2^x - 1) = \log(3\cdot 2^x - 1) + \log(8\cdot 2^x - 2) \Leftrightarrow$$

$$\log(4\cdot 2^x - 1)^2 = \log[(3\cdot 2^x - 1)(8\cdot 2^x - 2)] \Leftrightarrow$$

$$(4\cdot 2^x - 1)^2 = (3\cdot 2^x - 1)(8\cdot 2^x - 2) \Leftrightarrow$$

$$16\cdot 2^{2x} - 8\cdot 2^x + 1 = 24\cdot 2^{2x} - 6\cdot 2^x - 8\cdot 2^x + 2 \Leftrightarrow$$

$8\cdot 2^{2x} - 6\cdot 2^x + 1 = 0$ θέτω $2^x = y$ οπότε έχουμε

$8y^2 - 6y + 1 = 0$ με ρίζες $y = \frac{1}{2}$ ή $y = \frac{1}{4}$

Αν $y = \frac{1}{2}$ τότε $2^x = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

$y = \frac{1}{4}$ τότε $2^x = \frac{1}{4} = 2^{-2} \Leftrightarrow x = -2$ ρίζα η οποία απορρίπτεται διότι δεν ικανοποιεί τους περιορισμούς

ii)

Αν $x = -1$ τότε $α = \log 2$, $β = \log 1$, $γ = \log\frac{1}{2}$

επειδή $γ = \log\frac{1}{2} = \log 1 - \log 2 = 0 - \log 2 = -\log 2 = -α$ οι α και γ είναι αντίθετοι

Επίσης $A = 10^α + 10^β + 10^γ = 10^{\log 2} + 10^{\log 1} + 10^{\log\frac{1}{2}} = 2 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

15.

Έστω πολυώνυμο $P(x)$ $3^{ου}$ βαθμού το οποίο διαιρείται με το x^2+1, έχει ρίζα το 0 και το άθροισμα των συντελεστών του είναι ίσο με 2.

i) Δείξτε ότι $P(x)=x^3+x$

ii) Να λύσετε την ανίσωση $(P(x)-2)^3+(P(x)-2)^2+P(x)>2$

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $\alpha\neq 0$ το ζητούμενο πολυώνυμο

Το 0 είναι ρίζα του $P(x)$ $\Rightarrow$ $P(0)=0$

$\alpha\cdot 0^3+\beta\cdot 0^2+\gamma\cdot 0+\delta=0$

$\delta=0$

Άρα $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x$

Διαίρεση του $P(x)$ με το x^2+1

$$
\begin{array}{r|l}
\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x & x^2+1 \\ \cline{2-2}
-\alpha x^3 \qquad -\alpha x & \alpha x+\beta \\ \cline{1-1}
\beta x^2+(\gamma-\alpha)x & \\
-\beta x^2 \qquad -\beta & \\ \cline{1-1}
(\gamma-\alpha)x-\beta &
\end{array}
$$

Επειδή η παραπάνω διαίρεση είναι τέλεια, θα πρέπει το υπόλοιπο $\upsilon(x)=(\gamma-\alpha)x-\beta$ να είναι το μηδενικό πολυώνυμο, άρα πρέπει $\gamma-\alpha=0$ και $\beta=0$

$\alpha=\gamma$ και $\beta=0$

Άθροισμα των συντελεστών $=2$ $\Rightarrow$ $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2$

Και επειδή $\alpha=\gamma$, $\beta=0$, $\delta=0$ $\quad$ $\alpha+0+\alpha+0=2$

$2\alpha=2 \Leftrightarrow$

$\alpha=1$, άρα και $\gamma=1$

Οπότε $P(x)=x^3+x$

ii)

$(P(x)-2)^3+(P(x)-2)^2+P(x)>2 \Leftrightarrow (P(x)-2)^3+(P(x)-2)^2+P(x)-2>0$

Θέτουμε $(P(x)-2)=y$, οπότε $y^3+y^2+y>0 \Leftrightarrow$

$y(y^2+y+1)>0$ **(1)**

Επειδή το τριώνυμο y^2+y+1 έχει $\Delta=-3<0$, είναι μόνιμα θετικό.

Η (1) $\Leftrightarrow$ $y>0$ $\Leftrightarrow$ $P(x)-2>0$

$x^3+x-2>0$

$x^3+x-1-1>0$

$(x^3-1)+(x-1)>0$

$(x-1)(x^2+x+1)+(x-1)>0$

$(x-1)(x^2+x+1+1)>0$

$(x-1)(x^2+x+2)>0$ **(2)**

Επειδή το τριώνυμο $x^2+x+2>0$ έχει $\Delta=-7<0$, είναι μόνιμα θετικό.

Η (2) $\Leftrightarrow$ $x-1>0$ $\Leftrightarrow$ $x>1$.

16.

Α .

Έστω ένας αριθμός $\theta > 0$. Τι ονομάζουμε λογάριθμο του θ με βάση το α , όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$;

Β .

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ)

Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, θ_1 , θ_2 , $\theta > 0$ και $k \in \mathbb{R}$ τότε ισχύουν

α. $\log_\alpha(\theta_1 + \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$

β. $\log_\alpha\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log_\alpha\theta_1 - \log_\alpha\theta_2$

γ. $\log_\alpha\theta^k = \alpha\log_k\theta$

Γ.

Συμπληρώστε τις προτάσεις

α. Αν $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} x^{\nu-2} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_o$ ένα πολυώνυμο με $\alpha_\nu \neq 0$ τότε ο αριθμός ν ονομάζεται ………………..

β. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο δ(x) είναι το μηδενικό πολυώνυμο , τότε η διαίρεση ονομάζεται …………….

Προτεινόμενη λύση

Α.

Ονομάζουμε λογάριθμο του $\theta > 0$ με βάση το α όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$ έναν αριθμό x τέτοιον ώστε αν υψώσουμε το α στην x να βρούμε το θ δηλαδή

$\log_\alpha\theta = x$ αν και μόνο αν $\theta = \alpha^x$

Β.

$\alpha \rightarrow \Lambda$, $\beta \rightarrow \Sigma$, $\gamma \rightarrow \Lambda$

Γ .

α .

Αν $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} x^{\nu-2} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_o$ ένα πολυώνυμο με $\alpha_\nu \neq 0$ τότε ο αριθμός ν ονομάζεται βαθμός του πολυωνύμου P(x)

β.

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο δ(x) είναι το μηδενικό πολυώνυμο , τότε η διαίρεση ονομάζεται τέλεια διαίρεση

17.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = (α + 1)\,συν(βπx)$ όπου $α, β$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

i) Αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 3 και η περίοδος 4, να δείξετε ότι $α = 2$ και $β = \frac{1}{2}$

ii) Για $α = 2$ και $β = \frac{1}{2}$ να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{3}{2}$

iii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0,\ 4]$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$α > 0$ και $f_{max} = 3 \quad \Rightarrow \quad α + 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad α = 2$

Είναι $T = \dfrac{2π}{βπ} \quad \Leftrightarrow \quad 4 = \dfrac{2}{β} \quad \Leftrightarrow \quad β = \dfrac{1}{2}$

ii)

Για $α = 2$ και $β = \frac{1}{2}$ έχουμε $f(x) = 3συν\dfrac{πx}{2}$

$$f(x) = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 3συν\frac{πx}{2} = \frac{3}{2}$$

$$συν\frac{πx}{2} = \frac{1}{2}$$

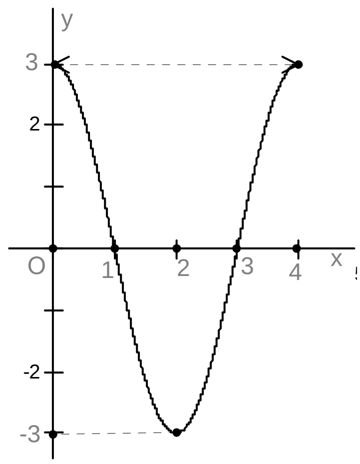
$$συν\frac{πx}{2} = συν\frac{π}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{πx}{2} = 2kπ \pm \frac{π}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = 4k \pm \frac{2}{3}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

iii)

Πίνακας τιμών

x	0	1	2	3	4
f(x)	3	0	–3	0	3

Γραφική παράσταση



18.

Σ' ένα γραμμικό σύστημα 2 x 2 με αγνώστους x ,y ισχύει

$D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 2D - 4D_x + 6D_y - 14$, όπου D , D_x , D_y οι γνωστές ορίζουσες

i) Δείξτε ότι $(D-1)^2 + (D_x + 2)^2 + (D_y - 3)^2 = 0$

ii) Να βρείτε την λύση του συστήματος

Προτεινόμενη λύση

i)

$D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 2D - 4D_x + 6D_y - 14 \Leftrightarrow$

$D^2 + D_x^2 + D_y^2 - 2D + 4D_x - 6D_y + 14 = 0 \Leftrightarrow$

$(D^2 - 2D + 1) + (D_x^2 + 4D_x + 4) + (D_y^2 - 6D_y + 9) = 0 \Leftrightarrow$

$(D-1)^2 + (D_x + 2)^2 + (D_y - 3)^2 = 0$

ii)

Στο (i) δείξαμε ότι $(D-1)^2 + (D_x + 2)^2 + (D_y - 3)^2 = 0$ οπότε

$D - 1 = 0$ και $D_x + 2 = 0$ και $D_y - 3 = 0$ άρα

$D = 1$, $D_x = -2$, $D_y = 3$ συνεπώς η λύση του συστήματος είναι

$x = \frac{D_x}{D} = -2$ και $y = \frac{D_y}{D} = 3$

19.

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x + k$

i) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x + 1)$ δείξτε ότι $k = -2$

ii) Για $k = -2$ να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)$

iii) Να δείξετε ότι το $(x - 2)$ είναι παράγοντας του $\pi(x)$

iv) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)(x - 2)$

iv) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση του $P(x)$ είναι ψηλότερα από την γραφική παράσταση της παραβολής $y = 10x^2 + 10$

Προτεινόμενη λύση

i)

Πρέπει και αρκεί $P(-1) = 0$

$(-1)^4 - (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) + k = 0$

$1 + 1 - 1 + 1 + k = 0$

$k = -2$

ii)

Για $k = -2$ το $P(x)$ γίνεται $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$

Σχήμα Horner στο $P(x)$

1	−1	−1	−1	−2	−1
	−1	2	−1	2	
1	−2	1	−2	0	

Οπότε $\pi(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

iii)

$\pi(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 - 2 = 8 - 8 + 2 - 2 = 0 \Rightarrow$ το $x - 2$ είναι παράγοντας του $\pi(x)$.

iv)

Σχήμα Horner στο $\pi(x)$

1	−2	1	−2	2
	2	0	2	
1	0	1	0	

Άρα $\pi(x) = (x - 2)(x^2 + 1)$

Με βάση τα (ii) και (iii) το $P(x)$ γράφεται $P(x) = (x + 1)\pi(x)$

$P(x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 1)$ **(1)**

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)(x - 2)$ είναι $\pi_1(x) = x^2 + 1$

iv)

Πρέπει και αρκεί $P(x) > y \overset{(1)}{\Leftrightarrow} (x + 1)(x - 2)(x^2 + 1) > 10x^2 + 10$

$(x + 1)(x - 2)(x^2 + 1) - 10(x^2 + 1) > 0$

$(x^2 + 1)[(x + 1)(x - 2) - 10] > 0$

$(x^2 + 1)(x^2 - x - 12) > 0$

$x^2 - x - 12 > 0 \Leftrightarrow x < -3$ ή $x > 4$

Επομένως η γραφική παράσταση του $P(x)$ είναι ψηλότερα από την παραβολή σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, -3)$ και $(4, +\infty)$

20.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - 4e^{x} + k$

i) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από την αρχή των αξόνων να βρείτε την τιμή του k

ii) Για $k = 3$

α. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$

iii) Αν ρ_1 , ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς 1 , ρ_1 , ρ_2 δικαιολογώντας την απάντηση σας

iv) Αν $k = 3$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $5f(\ln 3) - 2\,f(0)$

Προτεινόμενη λύση

i)

Είναι $f(0) = 0 \Leftrightarrow e^{0} - 4e^{0} + k = 0 \Leftrightarrow 1 - 4 + k = 0 \Leftrightarrow k = 3$

ii)

Για $k = 3$ έχουμε

α.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^{x} + 3 = 0$

θέτω $e^{x} = y$ οπότε η εξίσωση γίνεται $y^2 - 4y + 3 = 0$ με ρίζες $y = 1$ ή $y = 3$

αν $y = 1$ τότε $e^{x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

αν $y = 3$ τότε $e^{x} = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$

β.

$f(x) < 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^{x} + 3 < 0$

θέτοντας $e^{x} = y$ **(1)** η ανίσωση γίνεται $y^2 - 4y + 3 < 0$

και δεδομένου ότι το τριώνυμο $y^2 - 4y + 3$ έχει ρίζες το 1 και το 3 η ανίσωση αληθεύει όταν

$$1 < y < 3 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 1 < e^{x} < 3 \Leftrightarrow 0 < x < \ln 3$$

iii)

Έστω $\rho_1 = 0$ και $\rho_2 = \ln 3$ τότε αφού $e < 3$ είναι $\ln e < \ln 3 \Leftrightarrow 1 < \ln 3$

επομένως $0 < 1 < \ln 3 \Leftrightarrow \rho_1 < 1 < \rho_2$

iv)

Επειδή για $k = 3$ οι αριθμοί 0 και ln3 είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$

έχουμε ότι $f(0) = 0$ και $f(\ln 3) = 0$ άρα

$5f(\ln 3) - 2\,f(0) = 0$